Jurnal Barekeng
Vol. 6 No. 1 Hal. 13 – 18 (2012)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

BEBERAPA TEOREMA KEKONVERGENAN PADA INTEGRAL RIEMANN

VENN YAN ISHAK ILWARU[1], H. J. WATTIMANELA[2], M. W. TALAKUA[3]
[1,2,3] *Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: vennilwaru@yahoo.co.id

ABSTRACT

Riemann Integral is integral concept using the sum of lower Riemann and upper Riemann. The sufficient condition for the function sequence which is R-integralable at $[a,b]$ is the limit function also R-integralable at $[a,b]$. If function sequence $\{f_n\}$ convergence to f at $[a,b]$ and f_n R-integralable for every n, then the sufficient condition that function f also R-integralable at $[a,b]$ is $\{f_n\}$ uniform convergence to f at $[a,b]$. This research studies about sum convergence theorems in Riemann Integral.

Keyword : *Riemann Integral, Convergence, Uniform Convergence, Sufficient Condition*

PENDAHULUAN

Sekitar tahun 1670, Kalkulus berhasil ditemukan dan tokoh-tokoh matematika yang berperan dalam penemuan Kalkulus adalah Newton dan Leibniz. Kedua tokoh ini berhasil mengembangkan teorema fundamental, yaitu mengenai anti derivatif. Kemudian A. Cauchy (1789-1857) mulai mengembangkan teori tersebut, dan berhasil meneliti tentang integral dari fungsi kontinu.

Pada tahun 1584, Benhard Riemann mulai memperhalus definisi yang digunakan oleh Cauchy, dan Riemann pun mengadakan penelitian tentang integral fungsi diskontinu. Dari penelitian tersebut Riemann berhasil menemukan suatu metode khusus dari integral yang sangat simpel untuk didefinisikan, sehingga metode integral itu disebut Integral Riemann.

TINJAUAN PUSTAKA

Pada tahun 1875 Darboux berhasil memodifikasi Integral Riemann dengan mendefinisikan integral atas dan integral bawah sehingga terdefinisi suatu integral baru yang ekuivalen dengan Integral Riemann. Meskipun ada beberapa jenis teori integral tetapi Riemann-lah yang banyak memberi inspirasi pembentukan integral lain dan sudah banyak pemakaiannya di bidang matematika maupun di bidang lainnya. Namun dalam teori integral ada beberapa fungsi yang tidak terintegral Riemann pada selang-selang tertentu. Namun pada dasarnya suatu fungsi dikatakan terintegral Riemann maka fungsi tersebut harus memenuhi beberapa syarat diantaranya kekontinuan dan kekonvergenan pada fungsi tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema Kekonvergenan pada Integral Riemann (Integral-*R*)

Di dalam bagian ini akan dibicarakan syarat cukup agar barisan fungsi yang terintegral-R pada $[a,b]$, fungsi limitnya terintegral-R pada $[a,b]$. Contoh di bawah ini menunjukan bahwa ada fungsi limit suatu barisan fungsi yang terintegral-R pada $[a,b]$ tak terintegral-R pada $[a,b]$.

Contoh 1.
Banyaknya anggota Q, himpunan semua bilangan rasional, terhitung dan oleh karena itu dapat ditulis
$Q \cap [0,1] = \{r_1, r_2, r_3, ...\}$ dengan $r_i < r_{i+1},\ i = 1, 2, ...$
Diketahui fungsi dibawah ini ;

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & , \text{ jika } x=r_i \text{ dengan } r\in Q\cap[0,1], i=1,2,...,n\\ 0 & , \text{ untuk } x \text{ yang lain}\end{cases}$$

Untuk n yang cukup besar diperoleh

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1 & , \text{ jika } x=r_i \text{ dengan } r\in Q\cap[0,1], i=1,2,...,n\\ 0 & , \text{ untuk } x \text{ yang lain}\end{cases}$$

Mudah dipahami bahwa barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke f pada [0,1] dan untuk setiap n fungsi f_n terintegral-R pada [0,1], sebab f_n terbatas dan kontinu kecuali di titik-titik yang diskontinu, fungsi f tersebut di atas tidak terintegral-R pada [0,1].

Berdasarkan contoh di atas, jika diketahui barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a,b]$ dan f_n terintegral-R pada $[a,b]$ untuk setiap n, maka dapat dipelajari syarat cukup agar fungsi f juga terintegral-R pada $[a,b]$. Teorema di bawah ini memperlihatkan salah satu syarat cukup agar fungsi limit suatu barisan fungsi yang terintegral-R pada $[a,b]$ juga terintegral-R pada $[a,b]$.

Teorema 1.

Diketahui fungsi f_n terintegral-R pada $[a,b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a,b]$. Syarat cukup agar fungsi f terintegral-R pada $[a,b]$ dan

$$(R)\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n$$

adalah $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a,b]$

Bukti

Diambil bilangan $\varepsilon>0$ sebarang. Karena $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a,b]$ maka terdapat bilangan asli N_ε yang tak tergantung pada $\xi\in[a,b]$, sehingga berlaku

$$|f_n(\xi)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Untuk setiap $n\ge N_\varepsilon$ dan $\xi\in[a,b]$. Karena f_n terintegral-R pada $[a,b]$ berdasarkan kriteria Cauchy, maka terdapat bilangan $\delta_n>0$ sehingga untuk setiap dua partisi P_1 dan P_2 dengan $\|P_1\|<\delta_n$ dan $\|P_2\|<\delta_n$ berlaku

$$\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-(R)\int_a^b f_n\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Diambil bilangan asli n tetap asalkan $n\ge N_\varepsilon$. Diperoleh

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{P_1} f(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f(\xi)(v-u)\right|\\ &=\Big|\sum_{P_1} f(\xi)(v-u)-\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)+\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)+\\ &\quad\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f(\xi)(v-u)\Big|\\ &\le\left|\sum_{P_1} f(\xi)(v-u)-\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)\right|+\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|+\\ &\quad\left|\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f(\xi)(v-u)\right|\\ &\le\sum_{P_1}|f_n(\xi)-f(\xi)|(v-u)+\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|+\\ &\quad\sum_{P_2}|f_n(\xi)-f(\xi)|(v-u)\\ &<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)=\varepsilon\end{aligned}$$

Untuk setiap partisi P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\|<\delta_n$ dan $\|P_2\|<\delta_n$ dan $\delta=\delta_n$. Dengan kata lain terbukti f terintegral-R pada $[a,b]$.

Selanjutnya karena telah terbukti f terintegral-R pada $[a,b]$ maka terdapat bilangan $\delta_0>0$ sehingga untuk setiap partisi P pada $[a,b]$ dengan $\|P\|<\delta_0$ berlaku:

$$\left|(R)\int_a^b f-\sum_P f(\xi)(v-u)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk n di atas pilih $\delta_1=\min\{\delta,\delta_0\}$. Jika P partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\|<\delta_1$ diperoleh:

$$\begin{aligned}&\left|(R)\int_a^b f-(R)\int_a^b f_n\right|\\ &=\Big|(R)\int_a^b f-\sum_P f(\xi)(v-u)+\sum_P f(\xi)(v-u)-\sum_P f_n(\xi)(v-u)\\ &\quad+\sum_P f_n(\xi)(v-u)-(R)\int_a^b f_n\Big|\\ &\le\left|(R)\int_a^b f-\sum_P f(\xi)(v-u)\right|+\left|\sum_P f(\xi)(v-u)-\sum_P f_n(\xi)(v-u)\right|\\ &\quad+\left|\sum_P f_n(\xi)(v-u)-(R)\int_a^b f_n\right|\\ &\le\frac{\varepsilon}{3}+\sum_P|f(\xi)-f_n(\xi)|(v-u)+\frac{\varepsilon}{3}\\ &<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

Dengan kata lain $(R)\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n$ ■

Definisi 1

Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan terintegral serempak-*R* pada $[a,b]$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ yang tak bergantung kepada *n* sehingga untuk setiap *P* partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku:

$$\left|(R)\int_a^b f_n - \sum_P f_n(v-u)\right| < \varepsilon$$

untuk setiap *n*.

Berikut ini rumusan syarat cukup yang lain agar fungsi limit suatu barisan fungsi yang terintegral-*R* pada $[a,b]$ juga terintegral serempak- R pada $[a,b]$.

Teorema 2

Diketahui f_n terintegral-*R* pada $[a,b]$ untuk setiap *n* dan $\{f_n\}$ konvergen ke *f* pada $[a,b]$. Syarat cukup agar *f* terintegral-*R* pada $[a,b]$ dan $(R)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ terintegral serempak-*R* pada $[a,b]$.

Bukti

Diambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\{f_n\}$ terintegral serempak- R pada $[a,b]$ maka terdapat bilangan $\delta > 0$ yang tak bergantung kepada *n* sehingga berlaku:

$$\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R)\int_a^b f_n\right| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Untuk setiap *n* dan untuk setiap P_1 partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\| < \delta$. Jika P_2 sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P_2\| < \delta$ diperoleh:

$$\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|$$
$$= \left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R)\int_a^b f_n + (R)\int_a^b f_n - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|$$
$$\leq \left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u) - (R)\int_a^b f_n\right| + \left|(R)\int_a^b f_n - \sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}$$

Karena $\{f_n\}$ konvergen ke *f* pada $[a,b]$ maka untuk setiap $\xi \in [a,b]$ terdapat bilangan asli N_ξ sehingga berlaku:

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \text{ untuk setiap } n \geq N_\xi.$$

Diambil sebarang dua partisi P' dan P'' pada $[a,b]$ dengan $\|P'\| < \delta$ dan $\|P''\| < \delta$. Dipilih titik partisi ξ yang merupakan titik tengah selang $[u,v]$ pada P' dan P''. Karena banyaknya titik-titik ξ pada P' dan P'' berhingga maka banyaknya bilangan N_ξ yang bersesuaian dengan kekonvergenan barisan fungsi $\{f_n\}$ ke fungsi *f* pada $[a,b]$ juga berhingga.

Dipilih $N = \text{Maks}\{N_\xi; \xi \in P' \cup P''\}$.

Selanjutnya diperoleh:

$$\left|\sum_{P'} f(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f(\xi)(v-u)\right|$$
$$= \Big|\sum_{P'} f(\xi)(v-u) - \sum_{P'} f_N(\xi)(v-u) + \sum_{P'} f_N(\xi)(v-u)$$
$$- \sum_{P''} f_N(\xi)(v-u) + \sum_{P''} f_N(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f(\xi)(v-u)\Big|$$
$$\leq \left|\sum_{P'} f(\xi)(v-u) - \sum_{P'} f_N(\xi)(v-u)\right| + \left|\sum_{P'} f_N(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f_N(\xi)(v-u)\right|$$
$$+ \left|\sum_{P''} f_N(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f(\xi)(v-u)\right|$$
$$\leq \left|\sum_{P'} f(\xi) - f_N(\xi)\right|(v-u) + \left|\sum_{P'} f_N(\xi)(v-u) - \sum_{P''} f_N(\xi)(v-u)\right|$$
$$+ \left|\sum_{P''} f(\xi) - f_N(\xi)\right|(v-u)$$
$$< \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \varepsilon$$

kriteria Cauchy *f* terintegral- R pada $[a,b]$. ■

Teorema Kekonvergenan pada Integral Riemann Kontinu Lengkap (Integral-R^*)

Di dalam bagian ini akan dibicarakan syarat cukup agar fungsi limit suatu barisan fungsi yang terintegral- R^* pada $[a,b]$ juga terintegral- R^* pada $[a,b]$.

Teorema di bawah ini memperlihatkan salah satu syarat cukup agar fungsi limit suatu barisan fungsi yang terintgral- R pada $[a,b]$ juga terintegral- R pada $[a,b]$.

Teorema 3 (Teorema Kekonvergenan Seragam)

Diketahui fungsi f_n terintegral- R^* pada $[a,b]$ untuk setiap *n* dan $\{f_n\}$ konvergen ke *f* hampir diamana-mana pada $[a,b]$. Syarat cukup agar fungsi *f* terintegral pada $[a,b]$ dan $(R^*)\int_a^b f = \lim_{n\to 0}(R^*)\int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ konvergen seragam ke *f* pada $[a,b]$.

Bukti

Diambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\{f_n\}$ konvergen seragam di *f* pada $[a,b]$ maka terdapat bilangan asli N_ε yang tak bergantung pada $\xi \in [a,b]$, sehingga berlaku

$$\left|f_n(\xi)-f(\xi)\right|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ dan $\xi \in [a,b]$. Karena f_n terintegral- R^* pada $[a,b]$, berdasarkan Kriteria Cauchy terdapat fungsi positif $\delta_n : [a,b] \to R$ sehingga untuk setiap dua partisi-δ_n P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

dan

$$\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-(R^*)\int_a^b f_n\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Diambil bilangan asli *n* tetap asalkan $n \geq N_\varepsilon$. Diperoleh

$$\left|\sum_{P_1} f(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f(\xi)(v-u)\right|$$

$$=\left|\sum_{P_1} f(\xi)(v-u)-\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)+\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right.$$
$$\left.+\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f(\xi)(v-u)\right|$$

$$\leq\left|\sum_{P_1} f(\xi)(v-u)-\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)\right|+\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|$$
$$+\left|\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f(\xi)(v-u)\right|$$

$$\leq\sum_{P_1}\left|f(\xi)-f_n(\xi)\right|(v-u)+\left|\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f(\xi)(v-u)\right|$$
$$+\sum_{P_2}\left|f(\xi)-f_n(\xi)\right|(v-u)$$

$$<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)=\varepsilon$$

Untuk setiap dua partisi-δ_n P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $\delta=\delta_n$. Dengan kata lain terbukti *f* terintegral-*R* pada $[a,b]$.

Selanjutnya karena telah terbukti *f* terintegral-*R* pada $[a,b]$ maka terdapat fungsi positif $\bar{\delta} : [a,b] \to R$ sehingga setiap *P* partisi-$\bar{\delta}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(R^*)\int_a^b f-\sum_{P_1} f(\xi)(v-u)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk *n* di atas pilih $\delta_1(\xi)=\min\{\delta(\xi),\bar{\delta}(\xi)\}$ untuk setiap $\xi \in [a,b]$. Jika *P* partisi-δ_1 pada $[a,b]$ diperoleh

$$\left|(R^*)\int_a^b f-(R^*)\int_a^b f_n\right|$$

$$=\left|(R^*)\int_a^b f-\sum_P f(\xi)(v-u)+\sum_P f(\xi)(v-u)-\sum_P f_n(\xi)(v-u)\right.$$
$$\left.+\sum_P f_n(\xi)(v-u)-(R^*)\int_a^b f_n\right|$$

$$\leq\left|(R^*)\int_a^b f-\sum_P f(\xi)(v-u)\right|+\left|\sum_P f(\xi)(v-u)-\sum_P f_n(\xi)(v-u)\right|$$
$$+\left|\sum_P f_n(\xi)(v-u)-(R^*)\int_a^b f_n\right|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{3}+\sum_P\left|f(\xi)-f_n(\xi)\right|(v-u)+\frac{\varepsilon}{3}$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a)=\varepsilon$$

Dengan kata lain $(R^*)\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}(R^*)\int_a^b f_n$ ■

Berikut ini rumusan cukup yang lain agar fungsi *f* terintegral-R^* pada $[a,b]$, jika diketahui barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke *f* pada $[a,b]$ dan f_n terintegral-R^* pada $[a,b]$ untuk setiap *n*.

Definisi 2

Barisan fungsi $\{f_n\}$ terintegral serempak-R^* pada $[a,b]$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ yang tak tergantung kepada *n* sehingga berlaku

$$\left|\sum_P f_n(\xi)(v-u)-(R^*)\int_a^b f_n\right|<\varepsilon$$

Untuk setiap *n* dan untuk setiap partisi-δ pada $[a,b]$

Teorema 3.4 (Teorema Kekonvergenan serempak-R^*)

Diketahui f_n terintegral-R^* pada $[a,b]$ untuk setiap *n* dan $\{f_n\}$ konvergen ke *f* pada $[a,b]$. Syarat cukup agar *f* terintegral-R^* pada $[a,b]$ dan $(R^*)\int_a^b f=\lim_{n\to 0}(R^*)\int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ terintegral serempak-R^* pada $[a,b]$.

Bukti

Diambil bilangan $\varepsilon>0$ sebarang. Karena $\{f_n\}$ terintegral-R^* pada $[a,b]$ maka terdapat fungsi $\delta : [a,b] \to \Re$ sehingga berlaku

$$\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-(R^*)\int_a^b f_n\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk setiap n dan untuk setiap P_1 partisi- δ pada $[a,b]$. Diambil P_2 sebarang partisi- δ pada $[a,b]$. Selanjutnya diperoleh

$$\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|$$

$$=\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-(R^*)\int_a^b f_n+(R^*)\int_a^b f_n-\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|$$

$$\leq\left|\sum_{P_1} f_n(\xi)(v-u)-(R^*)\int_a^b f_n\right|+\left|(R^*)\int_a^b f_n-\sum_{P_2} f_n(\xi)(v-u)\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{3}$$

Karena $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a,b]$ maka untuk setiap $\xi\in[a,b]$ terdapat bilangan asli N_ξ sehingga berlaku $|f_n(\xi)-f(\xi)|<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Untuk setiap $n\geq N_\xi$. Diambil sebarang dua partisi- δ P' dan P'' pada $[a,b]$, dengan

$$P'=\{a=a_0,a_1,...,a_n;\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$$

dan

$$P''=\{a=a_0',a_1',...,a_m';\xi_1',\xi_2',...,\xi_m'\}.$$

Karena banyaknya titik-titik ξ_i untuk $i=1,2,...,n$ pada P' dan ξ_j' untuk $j=1,2,...,m$ pada P'' berhingga maka banyaknya bilangan N_ξ, ξ mewakili ξ_i dan ξ_j pada P' dan P'', yang bersesuaian dengan kekonvergenan barisan fungsi $\{f_n\}$ ke fungsi f pada $[a,b]$ juga berhingga. Dipilih

$$N=\text{maks}\{N_\xi;\xi\in P'\cup P''\}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$\left|\sum_{P'} f(\xi)(v-u)-\sum_{P''} f(\xi)(v-u)\right|$$

$$=\Big|\sum_{P'} f(\xi)(v-u)-\sum_{P'} f_n(\xi)(v-u)+\sum_{P'} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P''} f_n(\xi)(v-u)$$
$$+\sum_{P''} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P''} f(\xi)(v-u)\Big|$$

$$\leq\left|\sum_{P'} f(\xi)(v-u)-\sum_{P'} f_n(\xi)(v-u)\right|+\left|\sum_{P'} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P''} f_n(\xi)(v-u)\right|$$
$$+\left|\sum_{P''} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P''} f(\xi)(v-u)\right|$$

$$\leq\sum_{P'}|f_n(\xi)-f(\xi)|(v-u)+\left|\sum_{P'} f_n(\xi)(v-u)-\sum_{P''} f_n(\xi)(v-u)\right|$$
$$+\sum_{P''}|f_n(\xi)-f(\xi)|(v-u)$$

$$<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)=\varepsilon$$

Untuk setiap P_1 dan P_2 dua partisi- δ pada $[a,b]$, berdasarkan kriteria Cauchy maka f terintegral-R pada $[a,b]$. ■

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dan uraian pada bab-bab sebelumnya maka dapat diambil beberapa kesimpulan antara lain :

1. Syarat cukup agar fungsi f terintegral-R pada $[a,b]$ dan
$$(R)\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n$$
adalah $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a,b]$, jika diketahui fungsi f_n terintegral-R pada $[a,b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a,b]$.
2. Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan terintegral serempak-R pada $[a,b]$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat bilangan $\delta>0$ yang tak bergantung kepada n sehingga untuk setiap P partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\|<\delta$ berlaku:
$$\left|(R)\int_a^b f_n-\sum_P f_n(\xi)(v-u)\right|<\varepsilon$$
untuk setiap n.
3. Syarat cukup agar f terintegral-R pada $[a,b]$ dan $(R)\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ terintegral serempak-R pada $[a,b]$, jika diketahui f_n terintegral-R pada $[a,b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a,b]$..
4. Syarat cukup agar fungsi f terintegral pada $[a,b]$ dan $(R^*)\int_a^b f=\lim_{n\to 0}(R^*)\int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada $[a,b]$, jika diketahui fungsi f_n terintegral-R^* pada $[a,b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f hampir dimana-mana pada $[a,b]$.
5. Syarat cukup agar f terintegral-R^* pada $[a,b]$ dan $(R^*)\int_a^b f=\lim_{n\to 0}(R^*)\int_a^b f_n$ adalah $\{f_n\}$ terintegral serempak-R^* pada $[a,b]$ jika diketahui f_n

terintegral-R^* pada $[a,b]$ untuk setiap n dan $\{f_n\}$ konvergen ke f pada $[a,b]$.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G, (1994), *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, USA

Gordon, R, A., (1994), *The Integrals Of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock., Graduate Studies In Mathematics 4*, Volume 4., American Mathematical Society.,USA.

Hutahaean, E., (1989), *Analisis Real II*, Penerbit Karunika, Universitas Terbuka, Jakarta.

Jain, P. K. and Gupta, V. P., (1986), *Lebesgue Measure and Integration*. Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Lee, P. Y. (1989). *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*. Series in Real Analysis vol.2. World Scientific, Singapore.

Muslich., (2005), *Analisis Real II*, Lembaga Pengembangan Pendidikan,Surakarta.

Royden, H, L., (1989), *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, New York.

Soeparna, D., (2006), *Pengantar Analisis Real*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Soeparna, D., (2006), *Pengantar Analisis Abstrak*, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.